3ème Maths : M2
Durée : 2heures
Date : le 30 / 01 / 2008
Coefficient : 4

Devoir de contrôle N°2
Mathématiques

Exercice 1 : (3,5points)

On considère le tableau de variation ci-dessous d'une fonction f définie et dérivable sur IR.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1

1) Déterminer la nature de l'extremum de f et en déduire la valeur de $f'(-1)$.
2) Soit g la fonction définie et dérivable sur l'intervalle IR par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

   $a-$ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Interpréter le résultat obtenu.

   $b-$ Donner les variations de la fonction g.

   $c-$ En déduire la nature de l'extremum de g.

Exercice 2 : (5,5points)

Soit m un réel, on considère les fonctions f_m définies par $f_m(x)=\dfrac{(m+1)x^3-3x+1}{mx+1}$

On se propose d'étudier les variations de f_0 et f_{-2}

1) f_0 étant la fonction définie sur IR par $f_0(x)=x^3-3x+1$.

   $a-$ Calculer $f_0'(x)$ et dresser le tableau de variation de f_0.

   $b-$ Déterminer une équation de la tangente T à (C_0) au point d'abscisse 0.

   $c-$ Etudier la position de (C_0) par rapport à T.

2) f_{-2} étant la fonction définie sur $IR\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ par $f_{-2}(x)=\dfrac{-x^3-3x+1}{-2x+1}$.

   $a-$ Vérifier que $4x^3-3x^2-1=(x-1)(4x^2+x+1)$.

   $b-$ Calculer $f_{-2}'(x)$ pour $x\in IR\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

   $c-$ Dresser le tableau de variation f_{-2}.

Exercice3 : *(5points)*

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit M un point de coordonnées cartésiennes $\left(2\sqrt{3}\,,2\right)$

1) Déterminer les coordonnées polaires de M.

2) On considère le point N tels que : $ON = \frac{1}{2}OM$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

   a – Construire les points M et N dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. (page3 : **annexe**)

   b – Déterminer les coordonnées polaires de N.

3) a – Calculer $Cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ et $Sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$. En déduire $Cos\frac{11\pi}{12}$ et $Sin\frac{11\pi}{12}$.

   b – En déduire les coordonnées cartésiennes de N.

Exercice 4 : *(6 points)*

$ABCD$ est un losange tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $EBFD$ est un carré de sens direct (page3 : **annexe**)

1) Soit r la rotation de centre B d'angle $\frac{-\pi}{3}$

   a – Déterminer $r(A)$

   b – Construire $E' = r(E)$ et $F' = r(F)$

   c – Montrer que D, E', F' sont alignés.

2) Montrer que $BE'CF'$ est un carré.

3) Montrer que $BD = E'F'$.

4) soit $G \in [DE]$ et $H \in [EB]$ tel que $DG = EH$

On pose O le centre du carré $EBFD$ et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

   a – Quelle est l'image du segment [DE] par R ?

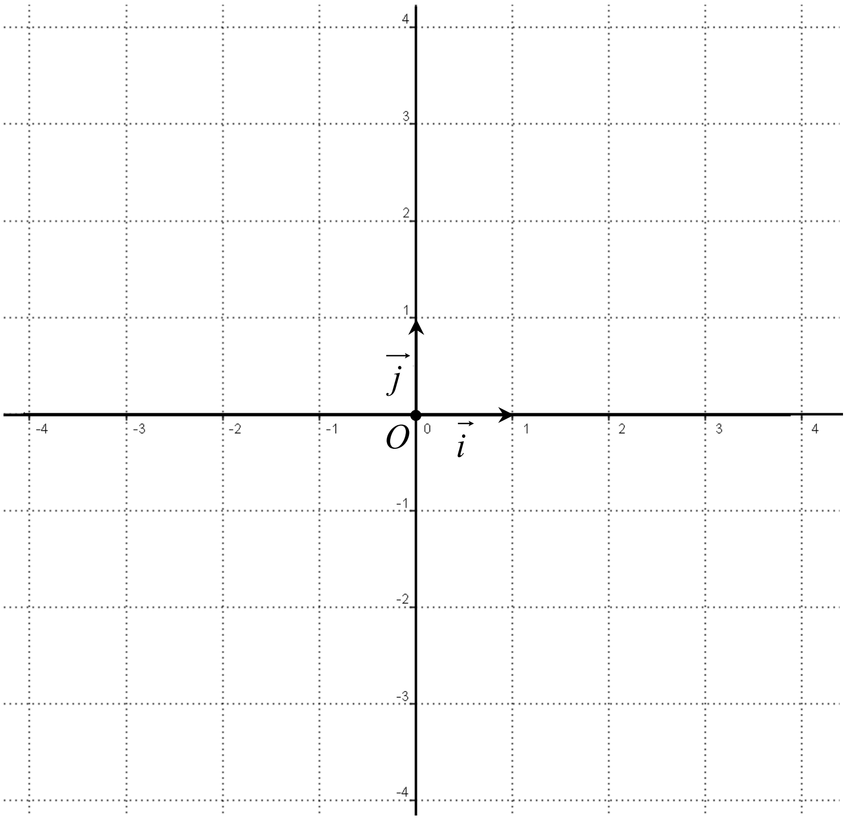
   b – Montrer que $R(G) = H$.

   c – Déduire que $(FG) \perp (DH)$.

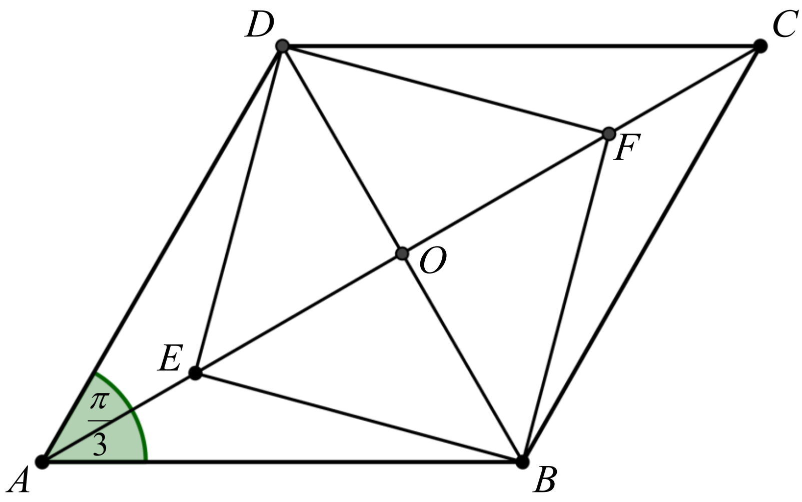
Annexe

Nom : …………………………….. Prénom : ………………………………………… N° :……

Exercice3 :



Exercice4 :



<u>Exercice 2</u> (6 points)

ABCD est un rectangle tel que AB = 1 et AD = 2. E est le milieu de [AB]. Pour tout point M du segment [AD], on pose AM = x et on note : $f(x) = \mathrm{ME}^2 + \mathrm{MC}^2$.

1°) Quel est l'ensemble I des valeurs que peut prendre x ?

2°) a) Montrer que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) = 2x^2 - 4x + \dfrac{21}{4}$

b) Etudier les variations de f et déterminer les éléments caractéristiques de la représentation graphique C_f de f sur I. Tracer la courbe C_f dans un repère orthogonal (unités graphiques : $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 4$ cm.

c) En déduire la valeur minimale de $\mathrm{ME}^2 + \mathrm{MC}^2$.
Quelles sont alors les dimensions du triangle MEC et calculer une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{EMC}}$ à 1° près.

3°) a) Montrer que MEC est rectangle en M si et seulement si $f(x) = \dfrac{17}{4}$.

b) En déduire les valeurs de x pour lesquelles le triangle MEC est rectangle en M.

c) Soit (Γ) le cercle de diamètre [EC], donner une construction précise des points M_1 et M_2 correspondants aux solutions de la question précédente.